Комплексный анализ, семинар 2 17.02.2012

1. Запишите оператор Лапласа $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ в координатах $z, \bar{z}$, где $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$.

2. Докажите, что вещественная и мнимая части голоморфной функции комплексного переменного $z = x + iy$ являются гармоническими функциями вещественных переменных x, y.

3. 1) Нарисуйте замкнутый путь γ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, разделяющий 2 различные точки z_1, z_2 в следующем смысле: путь γ не гомотопен нулю в $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2\}$, однако он гомотопен нулю как в области $\mathbb{C} \setminus \{z_1\}$, так и в области $\mathbb{C} \setminus \{z_2\}$.

2) Решите аналогичную задачу для трех различных точек на сфере Римана $\mathbb{P}$.

3) Предложите способ построения замкнутого пути γ на сфере Римана $\mathbb{P}$, разделяющий n различных точек $z_1, \ldots, z_n$ в следующем смысле: путь γ не гомотопен нулю в $\mathbb{P} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$, однако он гомотопен нулю в $\mathbb{P} \setminus \{z_1, \ldots [j] \ldots, z_n\}$ (здесь точка с номером j пропущена), для любого $j = 1, \ldots, n$.

4. Пусть функция f голоморфна в окрестности замкнутого единичного круга $\{|z| \leq 1\}$. Докажите, что

1)

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it})\, dt.$$

2)

$$f(0) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\{|z| \leq 1\}} f(x + iy)\, dxdy.$$

3) Как изменятся предыдущие утверждения, если вместо единичного круга взять круг радиуса $r > 0$?

5. Вычислите следующие интегралы по окружности $\{|z| = R\}$:

1)

$$\oint z^k \bar{z}^\ell dz, \quad k, \ell \in \mathbb{Z}.$$

2)

$$\oint z^k \bar{z}^\ell d\bar{z}, \quad k, \ell \in \mathbb{Z}.$$

6. Докажите, что комплекснозначная функция $f(x+iy)$ с непрерывным дифференциалом $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ является голоморфной в том и только том случае, когда $\oint f(z)dz = 0$ для любого гладкого замкнутого контура.